



Akademia Górniczo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej



---

---

Krzysztof Grządziel

kierunek studiów: informatyka stosowana

# Całkowanie numeryczne - porównanie skuteczności metody prostokątów, metody trapezów oraz metody Simpsona

Opiekun: mgr inż. Mikołaj Bednarski

Kraków, Styczeń 2007



# Spis treści

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Spis treści</b>                                                         | <b>2</b>  |
| <b>1 Przybliżone metody całkowania</b>                                     | <b>5</b>  |
| 1.1 Metoda prostokątów . . . . .                                           | 5         |
| 1.2 Metoda trapezów . . . . .                                              | 5         |
| 1.3 Metoda Simpsona . . . . .                                              | 7         |
| <b>2 Implementacja algorytmów</b>                                          | <b>9</b>  |
| 2.1 Metoda prostokątów . . . . .                                           | 9         |
| 2.2 Metoda trapezów . . . . .                                              | 9         |
| 2.3 Metoda Simpsona . . . . .                                              | 10        |
| <b>3 Omówienie wyników</b>                                                 | <b>12</b> |
| 3.1 Wartości całek oznaczonych otrzymanych analitycznie . . . . .          | 12        |
| 3.2 Wartości całek oznaczonych otrzymanych metodami numerycznymi . . . . . | 12        |
| <b>Literatura</b>                                                          | <b>16</b> |



# Rozdział 1

## Przybliżone metody całkowania

### 1.1 Metoda prostokątów

Przedział  $< a; b >$  dzielimy punktami

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

na  $n$  przedziałów o wspólnej długości  $\frac{b-a}{n}$ . W każdym z tych podprzedziałów bierzemy punkt  $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$  i obliczamy  $f(\xi_k) = y_k$ .

Za przybliżenie całki

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1.1)$$

przyjmujemy sumę iloczynów

$$y_1 \frac{b-a}{n} + y_2 \frac{b-a}{n} + \dots + y_n \frac{b-a}{n} \quad (1.2)$$

stąd

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (1.3)$$

Wzór przybliżony (1.3) nazywamy *wzorem prostokątów*. Interpretację geometryczną tego wzoru dla  $n = 3$  podano na rys. 1.1.

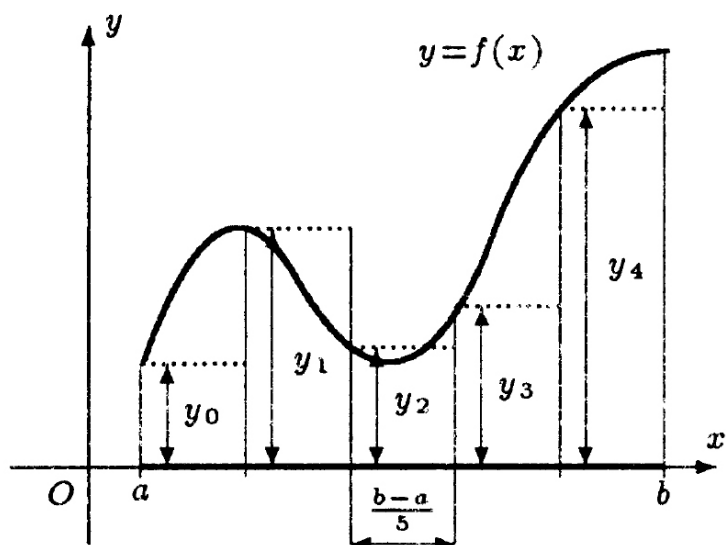
Zakładając dodatkowo istnienie i ciągłość drugiej pochodnej  $f''$  funkcji  $f$  na przedziale  $< a; b >$ , możemy podać ocenę błędu bezwzględnego  $\Delta_p$  przybliżenia (1.2) całki (1.1)

$$\Delta_p \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (1.4)$$

gdzie  $M_2 = \sup_{<a;b>} |f''(x)|$ .

### 1.2 Metoda trapezów

Przedział całkowania  $< a; b >$  dzielimy na pewną liczbę  $n$  przedziałów częściowych, wszystkich o tej samej długości  $(b-a)/n$ . Kolejne odcięte punktów podziału oznaczamy przez  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , odpowiednie zaś rzędne przez  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Jako

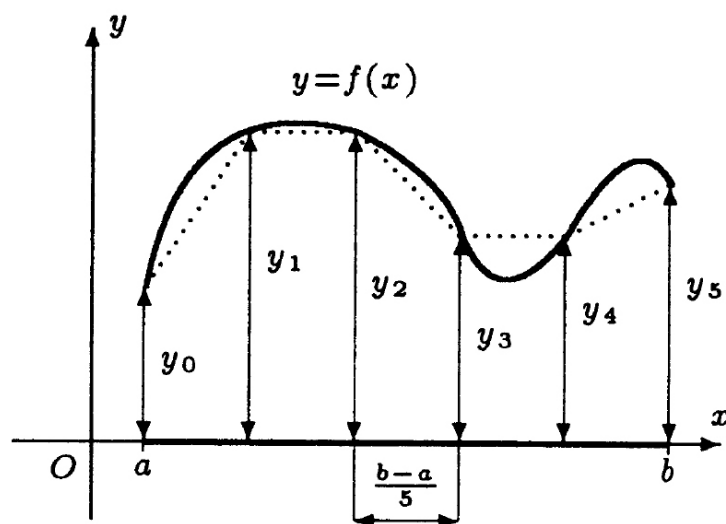


Rysunek 1.1: Interpretacja geometryczna wzoru 1.3 (metoda prostokątów).

przybliżoną wartość całki (1.1), przy założeniu, że  $f(x) \geq 0$  dla  $x \in \langle a, b \rangle$ , przyjmujemy w metodzie trapezów sumę pól  $n$  trapezów. Łatwe obliczenie prowadzi do wzoru

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})] \quad (1.5)$$

Błąd bezwzględny nie przekracza  $\frac{b-a}{12n^2} M_2$ , gdzie  $M_2$  jest górnym ograniczeniem wartości bezwzględnej drugiej pochodnej funkcji  $f(x)$  w przedziale całkowania, tzn. taką liczbą że  $|f''(x)| \leq M_2$  dla  $x \in \langle a, b \rangle$ .



Rysunek 1.2: Interpretacja geometryczna wzoru 1.5 (metoda trapezów).

## 1.3 Metoda Simpsona

Przedział  $< a; b >$  dzielimy punktami

$$x_k = a + \frac{b-a}{2n}k \quad (k = 1, 2, \dots, 2n-1)$$

na parzystą liczbę  $2n$  podprzedziałów o wspólnej długości  $\frac{b-a}{2n}$ . Bierzemy następnie pod uwagę podprzedziały  $< x_{2i-1}; x_{2i} >$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), przy czym oznaczamy  $x_0 = a$ ,  $x_{2n} = b$ . W każdym punkcie  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ) obliczamy wartość funkcji podcałkowej  $f(x_k) = y_k$ .

Metoda Simpsona polega na tym, że całkę

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

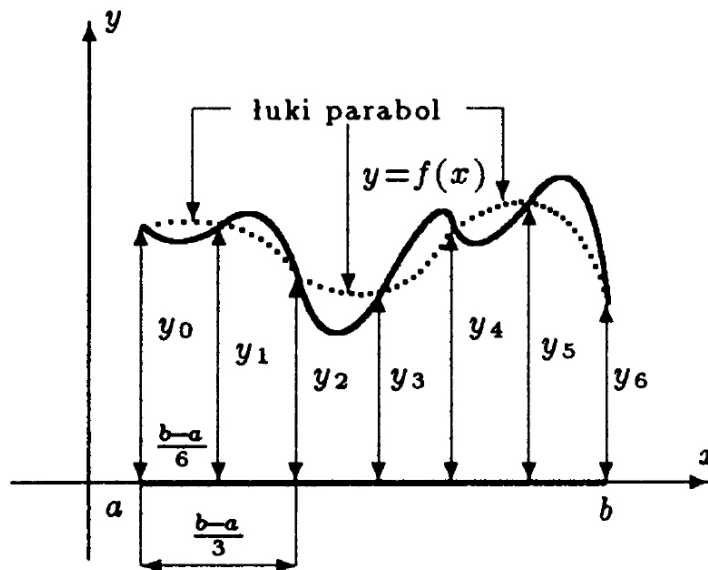
zastępujemy całką z funkcji

$$h_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

tak dobranej, aby spełnione były następujące warunki:

$$h_i(x_{2i-2}) = y_{2i-2}, \quad h_i(x_{2i-1}) = y_{2i-1}, \quad h_i(x_{2i}) = y_{2i} \quad (1.6)$$

Interpretacja geometryczna takiego postępowania jest przedstawiona na rys. 1.3.



Rysunek 1.3: *Metoda Simpsona.*

Okazuje się, że obliczanie współczynników  $a_i, b_i$  oraz  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nie jest konieczne, choć - jak łatwo sprawdzić - układ równań

$$\begin{cases} a_i x_{2i-2}^2 + b_i x_{2i-2} + c_i = y_{2i-2} \\ a_i x_{2i-1}^2 + b_i x_{2i-1} + c_i = y_{2i-1} \\ a_i x_{2i}^2 + b_i x_{2i} + c_i = y_{2i} \end{cases}$$

jest układem Cramera względem niewiadomych  $a_i, b_i$  i  $c_i$ , a więc dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  istnieje dokładnie jedna trójka uporządkowana liczb  $(a_i, b_i, c_i)$  taka, dla której warunki (1.6) są spełnione.

Wiedząc już, że określone wyżej funkcje  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) istnieją, możemy obliczyć całkę każdej z nich i skorzystać z warunków (1.6). Otrzymamy wówczas dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} h_i(x) dx &= \frac{a_i}{3}(x_{2i}^3 - x_{2i-2}^3) + \frac{b_i}{3}(x_{2i}^2 - x_{2i-2}^2) + \frac{c_i}{3}(x_{2i} - x_{2i-2}) = \\
&= \frac{x_{2i} - x_{2i-2}}{6} [2a_i(x_{2i}^2 + x_{2i}x_{2i-2} + x_{2i-2}^2) + 3b_i(x_{2i} + x_{2i-2} + 6c_i)] = \\
&= \frac{b-a}{6n} [a_i x_{2i-2}^2 + b_i x_{2i-2} + c_i + 4a_i \left(\frac{x_{2i} + x_{2i-2}}{2}\right)^2 + \\
&\quad + 4b_i \frac{x_{2i} + x_{2i-2}}{2} + 4c_i + a_i x_{2i}^2 + b_i x_{2i} + c_i] = \\
&= \frac{b-a}{6n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Stąd

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} h_i(x) dx$$

a wobec równości (1.7) otrzymamy ostatecznie

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-1}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + y_{2n}] \tag{1.8}$$

Wzór przybliżony (1.8) nazywamy *wzorem Simpsona*. Można udowodnić, że ocena błędu bezwzględnego  $\Delta_s$  przybliżenia, które daje wzór Simpsona, jest nasępująca:

$$\Delta_s \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \tag{1.9}$$

przy czym  $M_4 = \sup_{<a;b>} |f^{(4)}(x)|$ .

Z oceny (1.9) wynika w szczególności, że wzór Simpsona daje wynik dokładny przy całkowaniu wielomianów stopnia  $N \leq 3$ .

# Rozdział 2

## Implementacja algorytmów

### 2.1 Metoda prostokątów

Implementacja przybliżonej metody obliczania całek oznaczonych. Metoda prostokątów zaimplementowana w Pascalu.

Listing 2.1: Metoda prostokątów

```
1 { 2007-01-22 15:46 $ ChRiS3K }
2 Function cProstokat(a:Extended;b:Extended;n:Int64) : double;
3 var
4     S : Extended; { pole }
5     len : Extended; { dlugosc przedzialu }
6     xk,xk1 : Extended;
7     k : Int64;
8     ksi : Extended;
9 begin
10    S := 0;
11    k := 1;
12    len := (b-a)/n;
13    {for k:=1 to n do}
14    while k <= n do
15        begin
16            xk := a + len*k;
17            xk1 := a + len*(k-1);
18            ksi := (xk1 + xk) / 2;
19            S := S + f(ksi);
20            k := k + 1;
21        end;
22    S := S * len;
23    {write(p,S:0:20,' ');}
24    cProstokat:=S;
25 end;
```

### 2.2 Metoda trapezów

Implementacja przybliżonej metody obliczania całek oznaczonych. Metoda trapezów zaimplementowana w Pascalu.

Listing 2.2: Metoda trapezów

```

1  { 2007-01-22 15:46 $ ChRiS3K }
2  Function cTrapez(a:Extended;b:Extended;n:Int64) : double;
3  var
4      S : Extended; { pole }
5      len : Extended; { dlugosc przedzialu }
6      xk : Extended;
7      k : Int64;
8  begin
9      S := 0;
10     k := 1;
11     len := (b-a)/n;
12     S:= S + f(a) + f(b);
13     {for k:=1 to n do}
14     while k <= n-1 do
15     begin
16         xk := a + len*k;
17         {xk1 := a+ len*(k-1);
18         ksi := (xk1 + xk) /2;}
19         S := S + 2*f(xk);
20         k := k + 1;
21     end;
22     S := S * len / 2;
23     {write(p,S:0:20,' ');}
24     cTrapez:=S;
25 end;

```

## 2.3 Metoda Simpsona

Impementacja przybliżonej metody obliczania całek oznaczonych. Metoda Simpsona zaimplementowana w Pascalu.

Listing 2.3: Metoda Simpsona

```

1  { 2007-01-22 15:46 $ ChRiS3K }
2  Function cSimpson(a:Extended;b:Extended;n:Int64) : double;
3  var
4      S : Extended; { pole }
5      len : Extended; { dlugosc przedzialu }
6      xk : Extended;
7      k : Int64;
8  begin
9      S := 0;
10     k := 1;
11     len := (b-a)/(2*n);
12     S := S + f(a) + f(b);
13     {for k:=1 to n do}
14     while k <= (2*n-1) do
15     begin
16         xk := a + len*k;
17         {xk1 := a+ len*(k-1);

```

```

18          $k_{si} := (x_{k1} + x_k) / 2;$ 
19         if (k mod 2)=0 then S := S + 2*f(xk);
20         if (k mod 2)=1 then S := S + 4*f(xk);
21         k := k + 1;
22     end;
23     S := S * (b-a)/(6*n);
24     {write(p,S:0:20,' ');}
25     cSimpson:=S;
26 end;

```

## Rozdział 3

### Omówienie wyników

#### 3.1 Wartości całek oznaczonych otrzymanych analitycznie

1.

$$\int_0^5 (3x^2 + 2)dx = [x^3 + 2x]_0^5 = 135 \quad (3.1)$$

2.

$$\int_{1.5}^{2.5} \ln(x)dx$$

całkując przez części  $g' = 1$ ;  $g = x$ ;  $h' = \frac{1}{x}$ ;  $h = \ln(x)$

$$[x \cdot \ln(x)]_{1.5}^{2.5} - \int_{1.5}^{2.5} x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \cdot \ln(x) - x]_{1.5}^{2.5} = [x(\ln(x) - 1)]_{1.5}^{2.5} = 0.68252916752314109 \quad (3.2)$$

3.

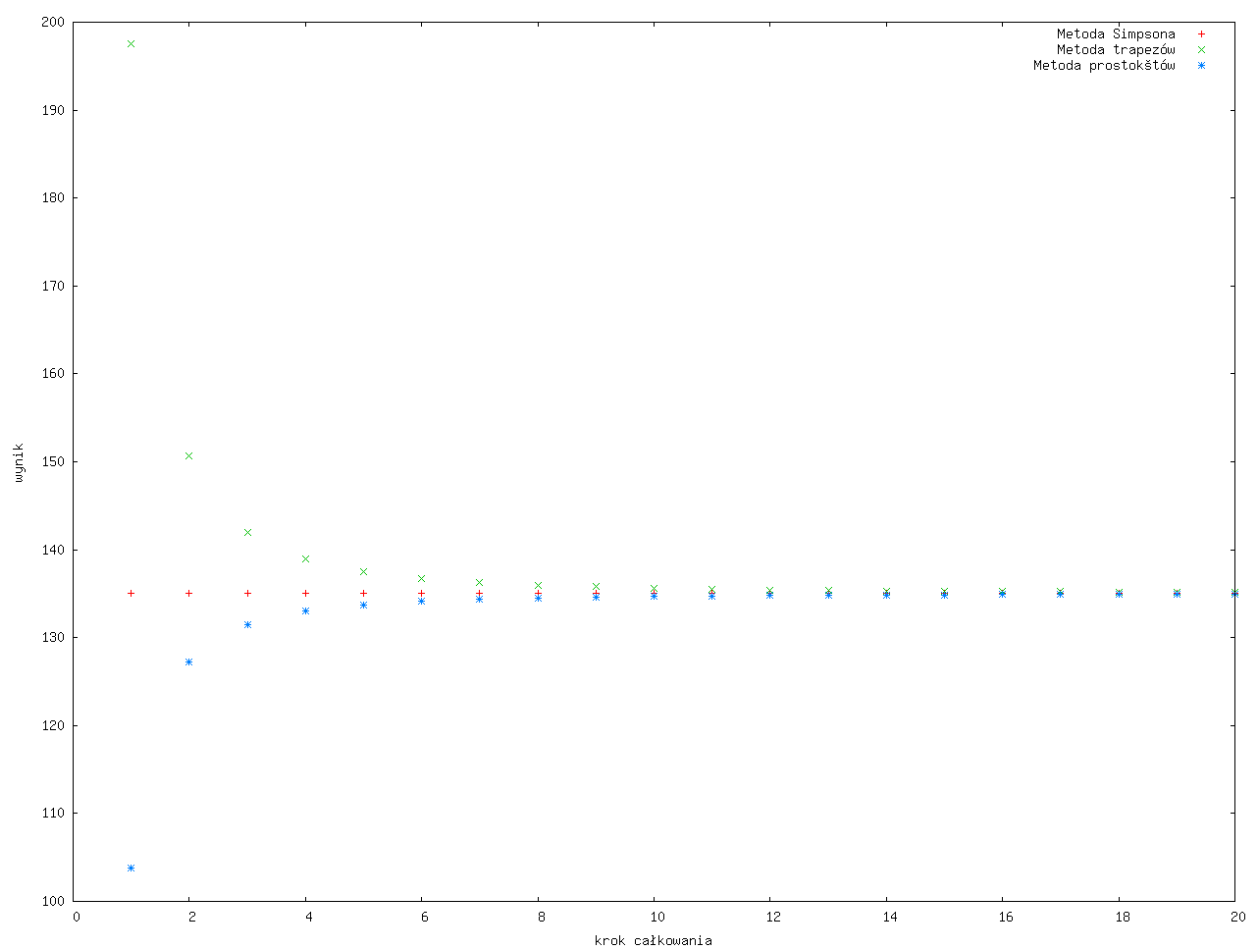
$$\int_0^5 (\sin(x) + 5)dx = [-\cos(x) + 5x]_0^5 = 25.71633781453677400 \quad (3.3)$$

#### 3.2 Wartości całek oznaczonych otrzymanych metodami numerycznymi

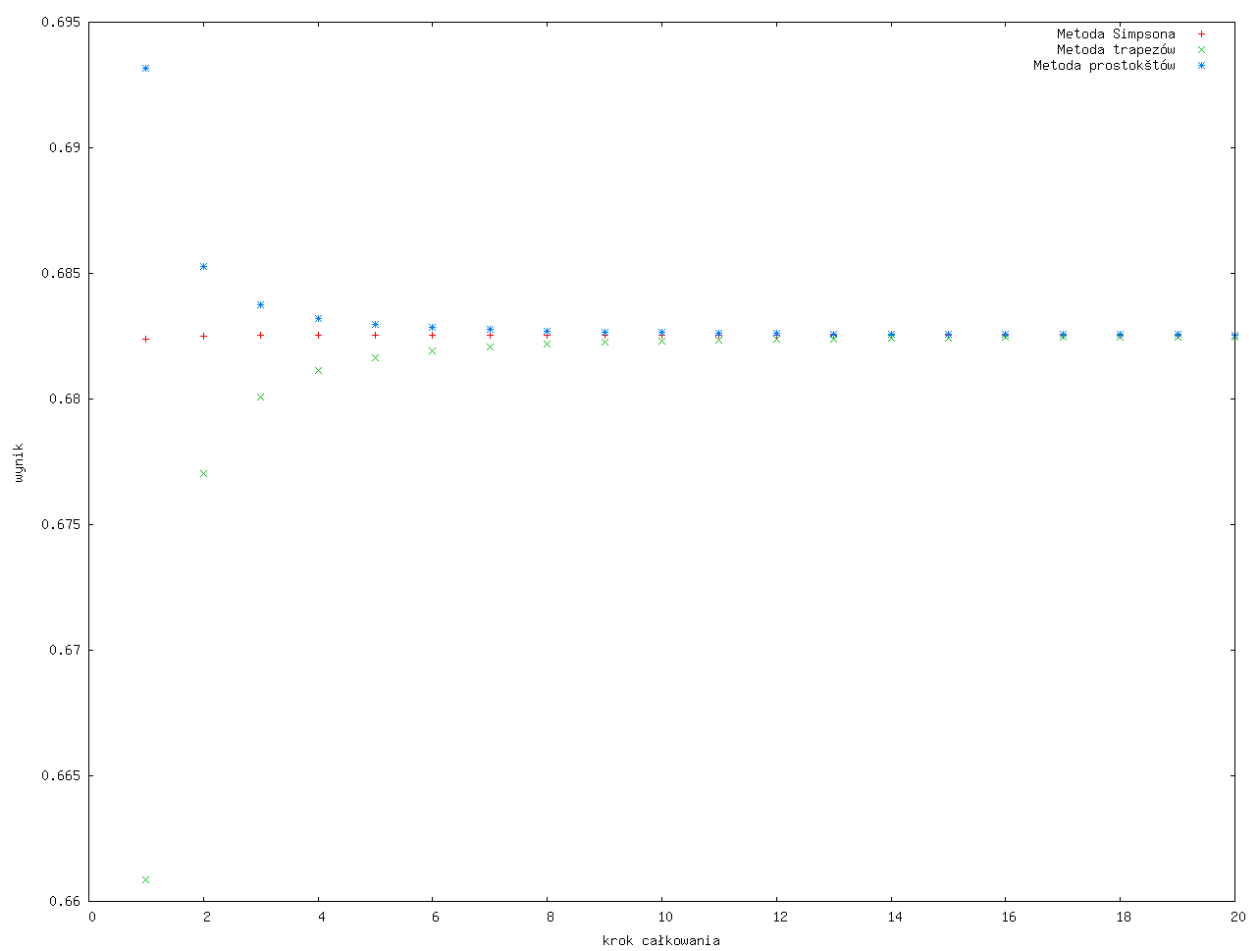
Poniższe wykresy pokazują wartości całek oznaczonych otrzymanych metodami numerycznymi dla poszczególnych kroków całkowania.

Wraz ze wzrostem ilości kroków, błąd bezwzględny przybliżenia całki maleje, co widać na wykresach.

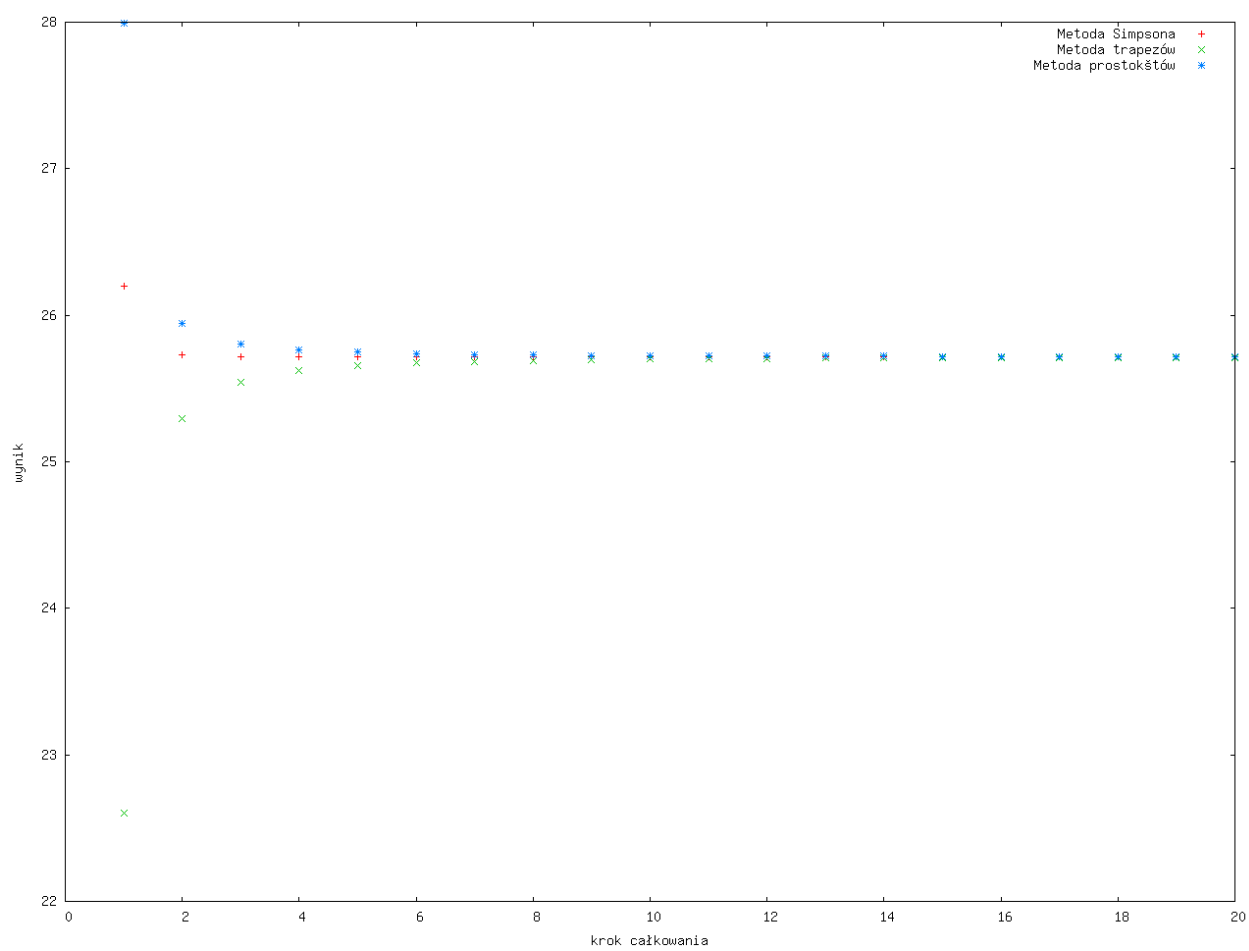
Najbardziej skuteczną (mającą najmniejszy błąd bezwzględny przybliżenia) metodą całkowania jest metoda Simpsona, następnie metoda prostokątów i metoda trapezów.



Rysunek 3.1:  $\int_0^5 (3x^2 + 2)dx$ .



Rysunek 3.2:  $\int_{1.5}^{2.5} \ln(x) dx$



Rysunek 3.3:  $\int_0^5 (\sin(x) + 5) dx$

# Literatura

- [1] W. Żakowski, G. Decewicz, *Matematyka - Analiza matematyczna, cz. 1*, WNT, Warszawa 1991.
- [2] W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1*, PWN, Warszawa 1978.